Sur la transformation d'une intégrale définie.

Par

Niels Nielsen,

Docteur ès sciences.

§ 1.

Généralisations de la formule eulérienne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2.$

1. Dans ma Thèse de doctorat (Om en Klasse bestemte Integraler og nogle derved definerede semi-periodiske Funktioner, p. 59) j'ai indiqué qu'une foule d'intégrales définies peuvent être déduites de la formule

$$\int_0^1 \frac{c^{x-1}\log c}{\sqrt{1-c^2}}\,dc = -\int_0^1 \frac{c^{x-1}}{1+c}\,dc \cdot \int_0^1 \frac{c^{x-1}}{\sqrt{1-c^2}}\,dc\,, \tag{I}$$

où il faut supposer que la partie réelle de x est positive. Dans les pages qui suivent je prouverai plus précisément la justesse de cette assertion en traitant avec plus de détails un exemple assez étendu.

D'abord je déduirai de (I) quelques formules que j'ai données en partie dans ma Thèse et dont nous aurons besoin plus loin.

Si dans (I) nous faisons $x = 1$ et $c = \sin\varphi$, nous aurons immédiatement la formule *eulérienne* bien connue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2. \tag{1}$$

Plus généralement nous pouvons remplacer x par un nombre entier et positif quelconque. Par là nous aurons aisément, la dernière intégrale qui figure au second membre de (I) étant $\frac{1}{2} B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \log \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \left(\log 2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} \right), \quad (2)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi \log \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)} \left(\log 2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{2n+1} \right), \quad (3)$$

2. Si nous supposons que la partie réelle de x soit positive, nous aurons en intégrant par parties

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 c^{x-1} \sqrt{1-c^2}^{\,2n-1} dc &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{x(x+2) \ldots (x+2n-2)} \cdot \int_0^1 \frac{c^{x+2n-1}}{\sqrt{1-c^2}} dc, \\ \int_0^1 c^{x-1} (1-c^2)^n dc &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{x(x+2) \ldots (x+2n)}. \end{aligned} \right\} (\alpha)$$

Puis si nous différentions les formules (α) par rapport à x, nous aurons de nouveau, par application de (I), pour $x = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi \log \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \left(\log 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} \right), \quad (4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \varphi \log \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \right). \quad (5)$$

Des formules (4) et (5) nous déduirons, en employant le développement ordinaire de

$$\log \sin\varphi = \frac{1}{2}\log(1-\cos^2\varphi)$$

et en intégrant terme à terme,

$$\int_0^1 F(2p-1, 1, 2p, x)\,dx$$

$$= \frac{4p-4}{2p-3}\left(\log 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2p-4}\right), \quad p \geqq 3,$$

$$\int_0^1 F(2p, 1, 2p+1, x)\,dx$$

$$= \frac{2p-1}{p-1}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2p-3}\right), \quad p \geqq 2,$$

où F désigne la série hypergéométrique de *Gauss*.

3. En répétant la différentiation de (I) par rapport à x, nous obtiendrons, après avoir posé $x = 1$ et $c = \sin\varphi$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 + \frac{\pi^2}{12}\right), \tag{6}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^3 \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\left(\log^3 2 + \frac{\pi^2}{4}\log 2 + 2\sigma_3\right), \tag{7}$$

où $\sigma_3 = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots$

Les formules plus générales que nous pourrions déduire de cette manière sont assez compliquées, de sorte que je ne m'y arrête pas ici.

4. Enfin, si nous posons dans la formule (I) $x = \frac{1}{n}$ où n est entier et positif, une simple transformation de la variable donnera

$$\int_0^1 \frac{\log c}{\sqrt{1-c^{2n}}}\,dc = -\int_0^1 \frac{1}{1+c^n}\,dc \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-c^{2n}}}\,dc. \tag{β}$$

La première intégrale du second membre de (β) peut être exprimée aisément par des fonctions élémentaires. La méthode ordinaire de décomposition donnera en effet

$$\frac{1}{1+c^n} = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} \frac{-c\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{n}+1}{c^2-2c\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{n}+1}.$$

Donc nous aurons

$$\int_0^1 \frac{1}{1+c^n}\,dc$$

$$= -\log 2\cdot\sum_0^{n-1}\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{n} - \sum_0^{n-1}\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{n}\cdot\log\sin\frac{(2\nu+1)\pi}{2n}$$

$$+\frac{\pi}{2n}\sum_0^{n-1}(n-2\nu-1)\sin\frac{(2\nu+1)\pi}{n}. \qquad (\gamma)$$

Mais nous avons les formules

$$\sum_0^{n-1}\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{n} = \sum_0^{n-1}\sin\frac{(2\nu+1)\pi}{n} = 0$$

et

$$\sum_0^{n-1}(2\nu+1)\sin\frac{(2\nu+1)\pi}{n} = -\frac{n}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Donc, par (β) et (γ),

$$\int_0^1 \frac{\log c}{\sqrt{1-c^{2n}}}\,dc$$

$$= -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{n}} - \sum_0^{n-1}\cos\frac{(2\nu+1)\pi}{n}\cdot\log\sin\frac{(2\nu+1)\pi}{2n}\right)\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-c^{2n}}}\,dc. \qquad (8)$$

Si nous posons dans (8) $n=2$, nous aurons la formule élégante

$$\int_0^1\frac{\log c}{\sqrt{1-c^4}}\,dc = -\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-c^4}}\,dc = -\frac{\pi}{4}\cdot F\left(\frac{\pi}{2}, i\right), \qquad (9)$$

où $F\left(\frac{\pi}{2}, i\right)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce et de module i.

§ 2.

Transformation de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f}(x \cdot \sin^2\varphi) \log \sin\varphi \, d\varphi$.

5. Si dans la formule (I) nous faisons $x = 2n+1$ ou $x = 2n$, n étant un entier positif, nous aurons, en vertu du n° 1,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \log \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \int_0^1 \frac{\omega^{2n}}{1+\omega} d\omega, \quad (\alpha)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\varphi \log \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)} \int_0^1 \frac{\omega^{2n-1}}{1+\omega} d\omega. \quad (\beta)$$

A l'aide de ces simples formules nous donnerons une transformation intégrale générale, assez curieuse. Si nous posons

$$\mathrm{p}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

nous aurons, en vertu de (α) et (β),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{p}(x \sin^2\varphi) \log \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{P}(\omega^2 x)}{1+\omega} d\omega, \quad \text{(II a)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, \mathrm{p}(x \sin^2\varphi) \log \sin\varphi \, d\varphi = -\int_0^1 \frac{\omega \cdot \mathrm{Q}(\omega^2 x)}{1+\omega} d\omega, \quad \text{(II b)}$$

où

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{A}_n x^n,$$

$$\mathrm{Q}(x) = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 x + \mathrm{B}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{B}_n x^n$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}_q = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2q-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2q} a_q, \quad \mathrm{B}_q = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2q}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2q+1)} a_q, \\ \qquad\qquad \mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0 = a_0. \end{array}\right\} \text{(II c)}$$

Si par exemple nous posons $\mathrm{p}(x \sin^2\varphi) = (1 - x \sin^2\varphi)^n$, où n est entier et positif, nous aurons par suite de (II a) et (4) pour $x = 1$

$$\int_0^1 \frac{F(-n, \frac{1}{2}, 1, \omega)}{1+\omega} d\omega$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\left(\log 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right), \quad (10)$$

où F représente la série hypergéométrique introduite par *Gauss*. Si nous effectuons l'intégration, terme à terme, du premier membre de (10), nous obtiendrons

$$\int_0^1 \frac{F(-n, \frac{1}{2}, 1, \omega)}{1+\omega} d\omega$$

$$= \sum_1^n (-1)^{\nu-1} \binom{n}{\nu} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu}\left(\log 2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2\nu}\right),$$

donc

$$\sum_1^n (-1)^{\nu-1} \binom{n}{\nu} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2\nu}\right)$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right),$$

car log 2 est transcendant.

Nous aurons des relations numériques analogues, auxquelles je ne m'arrêterai pas ici, si, employant la formule de *Moivre*, nous formons les intégrales de 0 à $\frac{\pi}{2}$ des expressions $\cos p\varphi \log \sin\varphi$ et $\sin p\varphi \log \sin\varphi$, intégrales qui se déterminent directement au moyen d'intégrations par parties.

6. *Nous voyons sans peine que dans les formules (II a) et (II b) nous pouvons mettre une série infinie et absolument convergente $f(x)$ au lieu du polynôme entier et rationnel $p(x)$. Si nous appelons $G(x)$ et $H(x)$ les nouvelles fonctions définies par les formules ainsi obtenues, nous aurons, par ces formules mêmes, $G(x)$ et $H(x)$ développées en séries entières qui ont le même cercle de convergence que la série $f(x)$.*

Pour examiner plus profondément les deux fonctions nouvelles, nous développerons le rapport de deux termes consécutifs

U_p et U_{p+1} de la série, par exemple pour $G(x)$, et nous aurons

$$\frac{U_p}{U_{p+1}} = \frac{2p+2}{2p+1} \frac{a_p}{a_{p+1}} \frac{1}{x} \frac{R_p}{R_p - \frac{1}{(2p+1)(2p+2)}}, \qquad (\gamma)$$

où

$$R_p = \log 2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2p},$$

$$R_p = \frac{1}{(2p+1)(2p+2)} + \frac{1}{(2p+3)(2p+4)} + \ldots$$

Mais nous avons

$$2R_p > \frac{1}{(2p+1)(2p+2)} + \frac{1}{(2p+2)(2p+3)} + \ldots = \frac{1}{2p+1}$$

et

$$2R_p < \frac{1}{2p(2p+1)} + \frac{1}{(2p+2)(2p+3)} + \ldots = \frac{1}{2p}.$$

Donc la formule (γ) donnera

$$\left|\frac{U_p}{U_{p+1}}\right| < \left|\frac{a_p}{a_{p+1}} \frac{1}{x}\right| \left(1 + \frac{3}{2p} + \frac{3}{4p^2} + \ldots\right),$$

$$\left|\frac{U_p}{U_{p+1}}\right| > \left|\frac{a_p}{a_{p+1}} \frac{1}{x}\right| \left(1 + \frac{3}{2p} - \frac{5}{4p^2} + \ldots\right).$$

Si nous supposons que

$$\left|\frac{a_p}{a_{p+1}} \frac{1}{x}\right| = 1 + \frac{\alpha}{p} + \ldots,$$

nous aurons ainsi

$$\left|\frac{U_p}{U_{p+1}}\right| = 1 + \frac{\alpha + \frac{3}{2}}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \ldots \qquad \text{(III)}$$

Donc, si en un point de la circonférence du cercle de convergence $f(x)$ devient infinie de l'ordre μ, $G(x)$ et $H(x)$ deviendront au même point infinies de l'ordre $\mu - \frac{3}{2}$. Si μ est plus petit que $\frac{3}{2}$, $\left(\alpha > -\frac{1}{2}\right)$, $G(x)$ et $H(x)$ auront des valeurs finies au point en question.

7. Les intégrales (II) nous conduiront sans peine au même résultat. On voit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin\varphi}{\cos^\mu \varphi} d\varphi$$

a une valeur finie et déterminée, pourvu que la partie réelle de μ soit plus petite que 3. Mais les définitions par les intégrales comportent en apparence une autre difficulté. Traçons les rayons qui aboutissent aux pôles de $\mathfrak{f}(x)$ sur le cercle de convergence de la série. Si ces pôles sont d'un ordre supérieur ou égal à l'unité, l'intégrale ne définit pas $G(x)$ et $H(x)$ sur les parties des rayons qui sont hors du cercle de convergence, quand même nous pourrions étendre $\mathfrak{f}(x)$ à ces domaines. Et il en est de même pour les rayons qui vont aux autres pôles éventuels de $\mathfrak{f}(x)$.

J'espère revenir sous peu sur cette question dans un autre mémoire; c'est pourquoi je me bornerai à indiquer un seul cas plus spécial: celui où $\mathfrak{f}(x)$ n'a sur son cercle de convergence qu'un nombre fini des pôles isolés et d'un ordre fini. Dans ce cas-là les équations (II) gardent leur validité partout, excepté sur les rayons vecteurs mentionnés, et $G(x)$ et $H(x)$ sont définies aussi sur ces «coupures» apparentes.

8. Prenons comme exemple

$$\mathfrak{f}(x^2 \sin^2\varphi) = F(1, 1, \tfrac{1}{2}, x^2 \sin^2\varphi).$$

La formule (II a) nous donnera

$$\int_0^1 F(1, 1, \tfrac{1}{2}, x^2 \sin^2\varphi) \log \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+\omega)(1-\omega^2 x^2)} d\omega,$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(1, 1, \tfrac{1}{2}, x^2 \sin^2\varphi) \log \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{1-x}\log\frac{1+x}{2} + \frac{1}{1+x}\log\frac{1-x}{2}\right). \tag{11}$$

La constante α du nº 6 est ici égale à $-\frac{1}{2}$, ce qui s'accorde avec le fait que l'intégrale qui figure dans (11) n'a qu'un pôle logarithmique pour $x = 1$.

La relation (11) nous montre en outre que la valeur de l'intégrale pour $x^2 = -3$ devient $-\frac{\pi^2}{24}\sqrt{3}$.

9. *Il est évident qu'une foule d'intégrales définies peuvent être déduites de nos formules fondamentales (II). Par ces transformations, des intégrales compliquées peuvent être changées en d'autres que nous pouvons traiter immédiatement d'après les méthodes ordinaires.*

D'ailleurs je ne prétends pas que plusieurs des résultats ainsi obtenus ne puissent être déduits sans trop de difficulté d'une autre manière.

L'application des formules fondamentales devient particulièrement claire si l'on part de certaines séries hypergéométriques.

Par les formules (II c) nous aurons immédiatement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{F}(\alpha, 1, \gamma, x\sin^2\varphi) \log \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{F}(\alpha, \frac{1}{2}, \gamma, \omega^2 x)}{1+\omega}\, d\omega, \quad \text{(IVa)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, \mathrm{F}(\alpha, \beta, 1, x\sin^2\varphi) \log \sin\varphi \, d\varphi = -\int_0^1 \frac{\omega \cdot \mathrm{F}(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, \omega^2 x)}{1+\omega}\, d\omega. \quad \text{(IV b)}$$

De (IV a) nous déduirons, en posant

$$\cos^{2p+1}\varphi = (1-\sin^2\varphi)^{\frac{2p+1}{2}}$$

et en appliquant la formule du binôme,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}\varphi \log \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{F}(-\frac{2p+1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \omega^2)}{1+\omega}\, d\omega.$$

A l'aide de (5) nous en tirerons

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{F}(-\frac{2p+1}{1}, \frac{1}{2}, 1, \omega)}{1+\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2p}{3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2p+1)}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2p+1}\right). \quad (12)$$

§ 3.
Applications de la transformation aux intégrales des fonctions élémentaires.

10. Si nous posons

$$\mathrm{f}(x^2 \sin^2\varphi) = \frac{1}{1-x^2\sin^2\varphi},$$

la formule (IVa) donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin\varphi}{1-x^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 x^2}}\,\frac{1}{1+\omega}\,d\omega. \qquad (\alpha)$$

Ainsi notre transformation nous a conduit immédiatement à cette formule qui apparaît si mystérieusement chez *M. Schlömilch* [1]). En appliquant les méthodes ordinaires nous déduirons de (α)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin\varphi}{1-x^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (13)$$

De (IVb) nous conclurons de même

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cdot\log\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = -\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sin}\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}\,\frac{d\omega}{1+\omega}. \qquad (\beta)$$

Par intégration par parties, nous aurons ensuite en appliquant (3)

$$\mathrm{I} = -\log 2. \qquad (\gamma)$$

Par (13) et (γ) nous obtiendrons sans peine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin\varphi}{1\pm\sin\varphi}\,d\varphi = -\frac{\pi}{2} \pm \log 2, \qquad (14)$$

---

1) *Schlömilch*: Compendium der höheren Analysis, Bd. II, p. 320.

tandis que (β) et (γ) donnent

$$\int_0^1 \frac{\arc\sin\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} \frac{d\omega}{1+\omega} = \log 2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arc\sin^2\omega}{(1+\omega)^2} d\omega. \quad (15)$$

11. Si nous supposons

$$f(x^2\sin^2\varphi) = -\frac{1}{2}\log(1-x^2\sin^2\varphi),$$

nous déduirons de (IVa), après avoir fait $x = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi \cdot \log\cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\omega^4}{4} + \dots\right)\frac{d\omega}{1+\omega}, \quad (\delta)$$

En intégrant par parties le second membre de (δ), nous aurons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi \cdot \log\sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\log^2 2 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+\omega)}{\omega\sqrt{1-\omega^2}} d\omega - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+\omega)}{\omega} d\omega. \quad (\varepsilon)$$

Si dans la première intégrale du second membre de (ε) nous posons $\omega = \cos\psi$, nous verrons, en appliquant la méthode ordinaire, que la valeur de l'intégrale est $\frac{\pi^2}{16}$. Par suite (ε) donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi \cdot \log\sin\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 - \frac{\pi^2}{24}\right), \quad (16)$$

formule qui se déduit aisément de (6) en posant $\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$.

Encore plus simplement se prouvent les formules (6) et (16) à l'aide de la formule bien connue

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32},$$

qui se transforme aisément en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi = \frac{\pi^3}{16}.$$

Si nous posons

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{et} \quad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi,$$

nous aurons les formules (6) et (16) à l'aide de la formule (1) d'*Euler*. Soustrayons, puis additionnons les équations (6) et (16), et nous aurons respectivement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi \cdot \log\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi^3}{16} \tag{17}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi \cdot \log\sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 + \frac{\pi^2}{24}\right). \tag{18}$$

12. Pour

$$f(x^2\sin^2\varphi) = \frac{\arcsin(x\sin\varphi)}{x\sin\varphi\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}},$$

la formule (IV a) donnera

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\log\sin\varphi}{\sin 2\varphi}\, d\varphi = -\frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{\log\dfrac{1+\omega}{1-\omega}}{\omega(1+\omega)}\, d\omega.$$

Décomposons $\dfrac{1}{\omega(1+\omega)}$ et nous trouverons après un calcul simple[1])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi\log\sin\varphi}{\sin 2\varphi}\, d\varphi = -\frac{\pi^3}{48}. \tag{19}$$

Si nous intégrons par parties, nous conclurons de (19), en appliquant (17),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cot\varphi \cdot \log\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi^3}{48}. \tag{20}$$

---

[1]) *Nielsen*: Thèse de doctorat, n° 23.

13. Enfin si nous posons

$$\mathrm{f}(x^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}},$$

la formule (IVa) donnera

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = -\int_0^1 \frac{\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \omega x\right)}{1+\omega} d\omega \tag{21}$$

où $\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, \omega x\right)$ désigne l'intégrale elliptique complète de première espèce et de module ωx.

Pour $x = 1$ la formule (21) donnera, en posant $\sin \varphi = \alpha$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right)}{1+k} dk = \frac{\pi^2}{8}. \tag{22}$$

Pour $x = i$, la même transformation donnera

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, ik\right)}{1+k} dk = -\int_0^1 \frac{\log \alpha}{\sqrt{1-\alpha^4}} d\alpha,$$

donc en appliquant (9)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, ik\right)}{1+k} dk = \frac{\pi}{4} \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, i\right). \tag{23}$$

14. Je ne me rappelle pas avoir vu autre part ni les formules intéressantes du n° 13 ni les formules générales du § 2. C'est la formule (13) tirée du Compendium de *M. Schlömilch* qui m'a suggéré l'idée de poursuivre les conséquences des formules que j'avais données antérieurement.

Sur la sommation de quelques séries.

Par

Niels Nielsen,

Docteur ès sciences.

I.

Sommation des séries $G_p(\varphi)$, $H_p(\varphi)$ et $K_p(\varphi)$.

1. Posons pour abréger

$$\left.\begin{aligned} G_{p,n}(\varphi) &= \sum_1^n \frac{1}{\nu^p} \frac{e^{\nu\varphi i}}{2^\nu \cos^\nu \varphi}, \\ H_{p,n}(\varphi) &= \sum_1^n \frac{1}{\nu^p} 2^\nu \cos^\nu \varphi \, e^{\nu\varphi i}, \\ K_{p,n}(\varphi) &= \sum_1^n \frac{1}{\nu^p} \cos^\nu \varphi \, e^{\nu\varphi i}, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

où nous supposons que n et p soient des nombres entiers, et en outre n positif.

Des définitions mêmes nous pouvons déduire sans peine les propriétés suivantes de nos séries:

1° Les séries (α) sont périodiques et ont la période primitive π.

2° Si n croît à l'infini, les trois séries sont absolument convergentes, pourvu que l'on ait respectivement

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \varphi_1 \leqq +\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3} \leqq \varphi_1 \leqq \frac{2\pi}{3}, \quad 0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi; \quad \varphi \equiv \varphi_1 \mod \pi.$$

Ceci n'a pas lieu pour les limites, si p n'est pas positif.

Nous désignerons les trois séries infinies ainsi obtenues par

$$G_p(\varphi),\quad H_p(\varphi)\quad \text{et}\quad K_p(\varphi).$$

3° $$G_p\left(\frac{\pi}{3}\right)=H_p\left(\frac{\pi}{3}\right),\ p\geqq 1 \quad \text{et} \quad G_p\left(\frac{\pi}{4}\right)=K_p\left(\frac{\pi}{4}\right). \tag{1}$$

4° Pour $p=0$ les trois séries se réduisent à des progressions géométriques et nous aurons

$$\left.\begin{aligned} G_{0,n}(\varphi) &= e^{2\varphi i}-\frac{e^{(n+2)\varphi i}}{2^n\cos^n\varphi},\\ H_{0,n}(\varphi) &= -1-e^{-2\varphi i}+2^{n+1}\cos^{n+1}\varphi\, e^{(n-1)\varphi i},\\ K_{0,n}(\varphi) &= i\cot\varphi - i\cot\varphi\cos^n\varphi\, e^{n\varphi i}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

5° Par différentiation les formules (2) donneront

$$\left.\begin{aligned} G'_{p,n}(\varphi) &= (i+\operatorname{tg}\varphi)\,G_{p-1,n}(\varphi) = G_{p-1,n}(\varphi)\cdot D_\varphi(i\varphi-\log\cos\varphi),\\ H'_{p,n}(\varphi) &= (i-\operatorname{tg}\varphi)\,H_{p-1,n}(\varphi) = H_{p-1,n}(\varphi)\cdot D_\varphi(i\varphi+\log\cos\varphi),\\ K'_{p,n}(\varphi) &= (i-\operatorname{tg}\varphi)\,K_{p-1,n}(\varphi) = K_{p-1,n}(\varphi)\cdot D_\varphi(i\varphi+\log\cos\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

A l'aide des formules (2) et (3) nous essayerons de trouver les sommes des trois séries. Des formules ainsi obtenues nous déduirons, en nous appuyant sur les relations (1), la valeur de quelques intégrales définies.

2. *Si p est négatif, la sommation des séries s'effectue plus facilement d'une autre manière.* Mettons en effet dans les trois séries (a) $e^{x+\varphi i}$ au lieu de $e^{\varphi i}$. On trouve aisément les sommes des nouvelles séries pour $p=0$. Si nous différentions p fois par rapport à x les formules ainsi trouvées, et si nous employons une formule bien connue du calcul différentiel, nous serons menés tout de suite au but en posant $x=0$. En considérant les expressions des trois restes analogues aux expressions (2), nous aurons les formules qui suivent:

$$G_{-p}(\varphi) = 2\cos\varphi\, e^{\varphi i}\big(E_{1,p}G_0(\varphi)+E_{2,p}G_0(\varphi)^2+E_{3,p}G_0(\varphi)^3+\dots$$
$$\dots+E_{p,p}G_0(\varphi)^p\big), \tag{4 a}$$

$$H_{-p}(\varphi) = \frac{e^{-2\varphi i}}{2\cos\varphi}\big(E_{1,p}H_0(\varphi)+E_{2,p}H_0(\varphi)^2+E_{3,p}H_0(\varphi)^3+\dots$$
$$\dots+E_{p,p}H_0(\varphi)^p\big), \tag{4 b}$$

$$K_{-p}(\varphi) = \frac{i\,e^{-\varphi i}}{\sin\varphi}\big(E_{1,p}K_0(\varphi) + E_{2,p}K_0(\varphi)^2 + E_{3,p}K_0(\varphi)^3 + \dots$$
$$\dots + E_{p,p}K_0(\varphi)^p\big), \qquad (4\,c)$$

où

$$E_{r,p} = \binom{r}{0} r^p - \binom{r}{1}(r-1)^p + \binom{r}{2}(r-2)^p - \dots$$
$$\dots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}\cdot 1^p, \qquad r \leqq p$$

et respectivement

$$-\frac{\pi}{3} < \varphi_1 < +\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3} < \varphi_1 < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < \varphi_1 < \pi; \quad \varphi_1 \equiv \varphi \mod \pi.$$

Il est évident qu'on pourra trouver les sommes de quelques séries numériques et infinies à l'aide des formules (4). Ainsi, si nous posons $\varphi = 0$, la formule (4 a) nous donnera

$$\frac{1^p}{2^2} + \frac{2^p}{2^3} + \frac{3^p}{2^4} + \frac{4^p}{2^5} + \dots = E_{1,p} + E_{2,p} + E_{3,p} + \dots + E_{p,p}. \quad (5)$$

Donc, la somme de la série est un nombre entier. Il en est de même pour les sommes des séries obtenues en faisant $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dans (4 a) ou dans (4 c).

3. Pour trouver les sommes de nos séries pour p positif, intégrons les équations (3). En intégrant plusieurs fois par parties, nous aurons les formules

$$G_{p,n}(\varphi) - G_{p,n}(0) = \sum_{1}^{p-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu\,!}(i\varphi - \log\cos\varphi)^{\nu}\, G_{p-\nu,n}(\varphi)$$
$$+ \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)\,!}\int_0^{\varphi} G_{0,n}(\varphi)\,(i\varphi - \log\cos\varphi)^{p-1}(i + \operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi, \quad (\beta)$$

$$H_{p,n}(\varphi) = \sum_{1}^{p-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu\,!}(i\varphi + \log\cos\varphi)^{\nu}\, H_{p-\nu,n}(\varphi)$$
$$+ \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)\,!}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} H_{0,n}(\varphi)\,(i\varphi + \log\cos\varphi)^{p-1}(i - \operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi, \quad (\gamma)$$

$$K_{p,n}(\varphi) - K_{p,n}(0) = \sum_{1}^{p-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} (i\varphi + \log\cos\varphi)^{\nu} K_{p-\nu,n}(\varphi)$$

$$+ \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \int_0^{\varphi} K_{0,n}(\varphi)\,(i\varphi + \log\cos\varphi)^{p-1}(i - \operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi. \quad (\delta)$$

Dans (δ) il faut supposer que p soit plus grand que l'unité. A l'aide de ces formules nous avons réduit la sommation de nos séries „à des quadratures".

Si nous considérons les expressions des restes obtenues par la formule (2), nous voyons à l'instant que dans (β) et (γ) n pourra croître à l'infini, si l'on a respectivement

$$-\frac{\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi}{3}.$$

Il en est de même pour (δ), φ étant tout à fait arbitraire mais réel, pourvu que $p \geqq 2$.

4. Pour n infini, on pourra beaucoup simplifier les intégrales dans les formules (β), (γ), (δ). On démontre en effet aisément les formules

$$(i + \operatorname{tg}\varphi)e^{2\varphi i} = i - \operatorname{tg}\varphi \quad \text{et} \quad (-i + \operatorname{tg}\varphi)(1 + e^{-2\varphi i}) = -2i.$$

En outre on aura

$$\mathrm{I} = \int_0^{\varphi} (i\varphi - \log\cos\varphi)^{p-1}(i - \operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{p}(i\varphi - \log\cos\varphi)^{p} - 2\int_0^{\varphi}(i\varphi - \log\cos\varphi)^{p-1}\cdot \operatorname{tg}\varphi\,d\varphi.$$

Si nous développons d'après la formule du binôme la fonction à intégrer dans le second membre, et si nous intégrons ensuite terme à terme, nous aurons, en employant l'intégration par parties,

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{p}(i\varphi - \log\cos\varphi)^{p} + 2i\int_0^{\varphi}(i\varphi - \log\cos\varphi)^{p-1}d\varphi.$$

Ces réductions effectuées, nous aurons les formules récurrentes:

$$G_p(\varphi) = a_p - \sum_{1}^{p-1} \frac{1}{\nu!}(\log\cos - i\varphi)^\nu G_{p-\nu}(\varphi) + \frac{(\log\cos\varphi - i\varphi)^p}{p!}$$

$$+ \frac{2i}{(p-1)!}\int_0^\varphi (\log\cos\varphi - i\varphi)^{p-1} d\varphi\,, \tag{6}$$

$$H_p(\varphi) = \sum_{1}^{p-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}(\log\cos\varphi + i\varphi)^\nu H_{p-\nu}(\varphi)$$

$$+ (-1)^p \frac{2i}{(p-1)!}\int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi (\log\cos\varphi + i\varphi)^{p-1} d\varphi\,, \tag{7}$$

$$K_p(\varphi) = S_p + \sum_{1}^{p-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}(\log\cos + i\varphi)^\nu K_{p-\nu}(\varphi)$$

$$+ \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\left[\int_0^\varphi (\log\cos\varphi + i\varphi)^{p-1} \cot\varphi\, d\varphi + i\int_0^\varphi (\log\cos\varphi + i\varphi)^{p-1} d\varphi\right], \tag{8}$$

où

$$a_p = G_p(0) = \frac{1}{1^p}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2^p}\,\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^p}\,\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^p}\,\frac{1}{2^4} + \dots$$

$$S_p = K_p(0) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

Dans (8) il faut supposer que p soit plus grand que l'unité.

5. Cependant on n'a pas de difficulté à faire disparaître cette restriction de la formule (8). Un calcul direct nous donnera en effet

$$G_1(\varphi) = \log 2 + \log\cos\varphi + i\varphi\,, \tag{9 a}$$

$$H_1(\varphi) = i(\pi - 2\varphi)\,, \tag{9 b}$$

$$K_1(\varphi) = -\log\sin\varphi + i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \tag{9 c}$$

Mais il est plus facile de déduire les formules (9) du développement habituel de $-\log(1-x)$, en posant respectivement

$$x = \frac{e^{\varphi i}}{2\cos\varphi}\,,\quad x = 2\cos\varphi\cdot e^{\varphi i}\,,\quad x = \cos\varphi\cdot e^{\varphi i}.$$

De cette manière on aura en effet une démonstration très simple de la valeur des séries numériques que j'ai données dans ma Thèse de doctorat (p. 33).

L'équation

$$G_1(\varphi) = \frac{e^{2\varphi i}}{1} - \frac{e^{4\varphi i}}{2} + \frac{e^{6\varphi i}}{3} - \frac{e^{8\varphi i}}{4} + \dots \tag{ε}$$

que nous pouvons déduire immédiatement de (9 a) vaut la peine d'être remarquée.

En posant

$$A_p(\varphi) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{e^{2\nu\varphi i}}{\nu^p},$$

nous déduirons de (ε)

$$G_1(\varphi) = A_1(\varphi). \tag{ζ}$$

De la formule (6) on tire de même, à l'aide de la formule (16) donnée au n° 11 du présent mémoire, la relation

$$G_2(\varphi) = A_2(\varphi) - \frac{1}{2} A_1^2(\varphi) - i\varphi A_1(\varphi). \tag{η}$$

Cependant je n'ai réussi encore à établir ni les formules analogues à (ζ) et (η) pour des valeurs plus grandes de p, ni les relations correspondantes pour les deux autres séries. Néanmoins nous nous appuierons plus loin sur une autre relation entre de telles séries pour des valeurs particulières de φ.

Si l'on voulait étendre les fonctions de φ définies par nos séries au delà des intervalles que nous avons déjà indiqués, on le pourrait facilement à l'aide des formules (6)—(9).

Pour une valeur quelconque — réelle ou imaginaire — de la variable φ, les formules (9) pourront servir de définitions aux trois fonctions qui correspondent à $p = 1$. A l'aide des formules (6)—(8), nous pouvons définir successivement les fonctions analogues pour toutes les valeurs de p entières et positives.

Les trois fonctions ainsi définies ont généralement des points critiques pour $\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi$ (m entier), mais elles sont holomorphes dans toute partie finie du plan qui ne contient pas l'axe des quantités réelles.

II.

Détermination de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_p d\varphi$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_p d\varphi$.

6. Posons pour abréger

$$G_r\left(\frac{\pi}{3}\right) = H_r\left(\frac{\pi}{3}\right) = A_r + i B_r,$$

$$(\log\cos\varphi + i\varphi)^r = \xi_r + i\eta_r,$$

$$\left(\log 2 + i\frac{\pi}{3}\right)^r = \alpha_r + i\beta_r,$$

et la formule (8) donnera, $K_p(\varphi)$ étant égale à zéro pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_p \cot\varphi\, d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_p d\varphi, \tag{10}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_p \cot\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_p d\varphi + (-1)^p p!\, S_{p+1}. \tag{11}$$

Les deux intégrales qui figurent au second membre des formules (10) et (11) se déterminent à l'aide des formules (6) et (7). En effet, si dans ces dernières nous posons $\varphi = \frac{\pi}{3}$, nous aurons aisément

$$\frac{(-1)^p}{p!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_p d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\beta_{p+1}}{(p+1)!} + \sum_0^{\frac{p-\varepsilon}{2}} \frac{\alpha_{p-2\nu}\cdot B_{2\nu+1}}{(p-2\nu)!} - \sum_1^{\frac{p-\varepsilon}{2}} \frac{\beta_{p-2\nu+1}\cdot A_{2\nu}}{(p-2\nu+1)!}, \tag{α}$$

$$\frac{(-1)^p}{p!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_p \, d\varphi$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{2} a_{p+1} + \frac{1}{2}\frac{a_{p+1}}{(p+1)!} - \sum_0^{\frac{p-\varepsilon}{2}} \frac{\beta_{p-2\nu} \cdot B_{2\nu+1}}{(p-2\nu)!} - \sum_1^{\frac{p+\varepsilon}{2}} \frac{a_{p-2\nu+1} \cdot A_{2\nu}}{(p-2\nu+1)!}, \qquad (\beta)$$

où ε doit être égal à 0 ou 1, selon que p est pair ou impair.

7. Si nous posons maintenant

$$C_{2p}(\varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu^{2p}}, \quad S_{2p+1}(\varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin \nu\varphi}{\nu^{2p+1}},$$

nous aurons immédiatement

$$A_{2r} = C_{2r}\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad B_{2r+1} = S_{2r+1}\left(\frac{\pi}{3}\right), \qquad (\gamma)$$

car $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$.

Mais nous avons

$$\left.\begin{aligned}
(-1)^p C_{2p}(\varphi) &= \frac{\pi}{2}\frac{\varphi^{2p-1}}{(2p-1)!} - \frac{\varphi^{2p}}{2(2p)!} + \sum_1^{p} (-1)^{\mu} \frac{\varphi^{2p-2\mu}}{(2p-2\mu)!} S_{2\mu}, \\
(-1)^p S_{2p+1}(\varphi) &= \frac{\pi}{2}\frac{\varphi^{2p}}{(2p)!} - \frac{\varphi^{2p+1}}{2(2p+1)!} + \sum_1^{p} (-1)^{\mu} \frac{\varphi^{2p-2\mu+1}}{(2p-2\mu+1)!} S_{2\mu}.
\end{aligned}\right\} (\delta)$$

Par suite, les formules (γ) et (δ) donneront aisément

$$A_{2r} = \gamma_r \cdot \pi^{2r}, \quad B_{2r+1} = \delta_r \cdot \pi^{2r+1}, \qquad (\varepsilon)$$

où γ_r et δ_r sont des nombres rationnels.

On aura par exemple

$$B_1 = \frac{\pi}{3}, \quad A_2 = \frac{\pi^2}{36}, \quad B_3 = \frac{5}{162}\pi^3.$$

La formule (ε) *nous montre que l'intégrale* (α) *est un polynôme rationnel, entier et homogène en* π *et* $\log 2$*; il en est de même de l'intégrale* (β)*, abstraction faite du premier terme du second membre.*

8. Pour déterminer avec plus de précision les polynômes mentionnés dans le n° 7, nous les ordonnerons suivant les puissances descendantes de log 2.

Si nous posons

$$\left.\begin{aligned}
P_{2r+1} &= \sum_{0}^{r} (-1)^{\nu} \frac{B_{2\nu+1}}{(2r-2\nu)!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2r-2\nu} \\
&+ \sum_{1}^{r} (-1)^{\nu-1} \frac{A_{2\nu}}{(2r-2\nu+1)!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2r-2\nu+1} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2r+1}}{2(2r+1)!}, \\
Q_{2r} &= \sum_{1}^{r} (-1)^{\nu-1} \frac{A_{2\nu}}{(2r-2\nu)!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2r-2\nu} \\
&+ \sum_{0}^{r-1} (-1)^{\nu} \frac{B_{2\nu+1}}{(2r-2\nu+1)!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2r-2\nu+1} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2r}}{2(2r)!},
\end{aligned}\right\} (\zeta)$$

les formules (α) et (β) donneront

$$\left.\begin{aligned}
\frac{(-1)^p}{p!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_p d\varphi &= \frac{\pi}{2 \cdot p!} \log^p 2 + \sum_{1}^{\frac{p-\varepsilon}{2}} (-1)^r \frac{P_{2r+1}}{(p-2r)!} \log^{p-2r} 2, \\
\frac{(-1)^p}{p!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_p d\varphi &= \frac{(-1)^{p-1}}{2} a_{p+1} + \frac{1}{2(p+1)!} \log^{p+1} 2 \\
&+ \sum_{1}^{\frac{p+\varepsilon}{2}} (-1)^r \frac{Q_{2r}}{(p-2r+1)!} \log^{p-2r+1} 2.
\end{aligned}\right\} (\eta)$$

A l'aide de l'identité

$$\frac{1}{0!\, m!} - \frac{1}{1!\,(m-1)!} + \frac{1}{2!\,(m-2)!} - \ldots + \frac{(-1)^m}{m!\, 0!} = 0,$$

les formules (δ) donneront

$$\frac{\varphi^{2p}}{(2p+1)!} S_1(\varphi) + \sum_{0}^{p-1} (-1)^{\nu} \left[\frac{\varphi^{2p-2\nu-1}}{(2p-2\nu-1)!} C_{2\nu+2}(\varphi) - \frac{\varphi^{2p-2\nu-2}}{(2p-2\nu-2)!} S_{2\nu+3}(\varphi) \right]$$

$$= -\frac{\varphi^{2p+1}}{2(2p+1)!},$$

$$\sum_{0}^{p-1}(-1)^{\nu}\left[\frac{\varphi^{2p-2\nu-1}}{(2p-2\nu-1)!}S_{2\nu+1}(\varphi)+\frac{\varphi^{2p-2\nu-2}}{(2p-2\nu-2)!}C_{2\nu+2}(\varphi)\right]$$

$$=-\frac{\varphi^{2p}}{2(2p)!}+(-1)^{p-1}S_{2p}.$$

Si dans ces formules nous posons $\varphi=\frac{\pi}{3}$, nous aurons en vertu de (ζ)

$$P_{2r+1}=0 \quad \text{et} \quad Q_{2r+1}=(-1)^{r-1}S_{2r}.$$

Par suite, la première des formules (η) nous donne les formules élégantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\xi_p\,d\varphi=(-1)^p\,\frac{\pi}{2}\log^p 2, \tag{12}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta_p\cot\varphi\,d\varphi=(-1)^{p-1}\frac{\pi}{2}\log^p 2, \tag{13}$$

c'est-à-dire une généralisation assez étendue et remarquable de la formule eulérienne bien connue, qu'on obtiendra pour $p=1$.

La dernière formule (η), au contraire, nous donnera

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta_p\,d\varphi=-\frac{p!}{2}a_{p+1}+\frac{(-1)^p}{2p+2}\log^{p+1}2$$

$$+(-1)^{p-1}p!\sum_{1}^{\frac{p+\varepsilon}{2}}\frac{S_{2\nu}}{(p-2\nu+1)!}\log^{p-2\nu+1}2, \tag{14}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\xi_p\cot\varphi\,d\varphi=-\frac{p!}{2}a_{p+1}+\frac{(-1)^p}{2p+2}\log^{p+1}2$$

$$+(-1)^{p-1}p!\sum_{1}^{\frac{p+\varepsilon}{2}}\frac{S_{2\nu}}{(p-2\nu+1)!}\log^{p-2\nu+1}2+(-1)^p p!\,S_{p+1} \tag{15}$$

où comme plus haut ε doit être égal à 0 ou à 1, selon que p est pair ou impair.

9. L'auteur a été conduit à entreprendre ces recherches par un nouvel essai infructueux de démontrer la transcendance de

$$S_{2r+1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2r+1}}$$

et d'autres nombres analogues. D'après ce que j'ai pu reconnaître, je n'hésite pas à affirmer que les formules (12)—(15) ne sont que des cas particuliers de formules d'un genre pareil mais plus générales, dont plusieurs sont sûrement aussi surprenantes par leur simplicité que (12) et (13).

Cependant je n'ai pas réussi encore à trouver un moyen d'éviter les calculs très pénibles qui semblent nécessaires pour arriver à ce résultat.

III.

Applications des formules générales.

10. Avant de passer à la déduction de quelques intégrales plus spéciales à l'aide des formules générales (12)—(15), nous donnerons quelques équations qui nous seront utiles plus loin.

Si nous posons $\cos\varphi = \omega$, nous aurons, en développant en série la fonction à intégrer et en intégrant ensuite terme à terme,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^p \cos\varphi \cdot \cot\varphi \, d\varphi = \frac{(-1)^p p!}{2^{p+1}} S_{p+1}. \tag{α}$$

De même nous aurons

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log^p \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \sum_{0}^{p} \binom{p}{\nu} \nu!\, a_{\nu+1} \log^{p-\nu} 2\,, \tag{β}$$

où $a_{\nu+1}$ a la signification donnée au nº 4.

11. Par (14) nous aurons pour $p = 1$

$$a_2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log^2 2\,, \tag{16}$$

résultat que j'ai déjà donné dans ma Thèse de doctorat (p. 26).

La formule (15) ne donne pour $p = 2$ que le même résultat que (β).

12. Si nous posons $p = 2$, la formule (12) nous donnera

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 + \frac{\pi^2}{12}\right), \tag{17}$$

résultat que l'auteur a déduit d'une autre manière dans son mémoire «Sur la transformation d'une intégrale définie» (n° 3).

De (13) nous conclurons de même

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \log\cos\varphi \cot\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{4}\log^2 2. \tag{18}$$

Si nous transformons cette intégrale en intégrant par parties et en posant $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de φ, nous obtiendrons deux équations, qui nous donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \log\sin\varphi \,\mathrm{tg}\,\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}\left(\log^2 2 - \frac{\pi^2}{12}\right), \tag{19}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi \log\sin\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 - \frac{\pi^2}{24}\right). \tag{20}$$

Puis, si nous soustrayons ou ajoutons les deux formules (20) et (17), nous aurons respectivement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi \log\cot\varphi \, d\varphi = \frac{\pi^3}{16}, \tag{21}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi \log\sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 + \frac{\pi^2}{24}\right). \tag{22}$$

Dans le mémoire susdit (n° 11), l'auteur a trouvé les formules (20)—(22) par des méthodes tout à fait différentes. La démonstration qui est donnée ici est la plus simple.

Si, dans l'intégrale qui suit, nous mettons $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de φ, nous aurons à l'aide de (20)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \log \cos\varphi \log \sin\varphi \, d\varphi = \frac{\pi^2}{8}\left(\log^2 2 - \frac{\pi^2}{24}\right). \tag{23}$$

13. Pour $p = 2$ les deux équations (14) et (15) donneront

$$a_3 = \frac{1}{6}\log^3 2 - \frac{\pi^2}{12}\log 2 + \frac{7}{8}S_3, \tag{24}$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \log \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi^2}{2}\log 2 - \frac{7}{8}S_3, \tag{25}$$

résultat qui se déduit facilement d'une autre manière.

Par (β) nous aurons ensuite, à l'aide de (24),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \sin\varphi \cdot \mathrm{tg}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{24}\log^3 2 + \frac{7}{32}S_3. \tag{26}$$

14. Pour $p = 3$, la formule (12) nous donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^3 \cos\varphi \, d\varphi - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \log \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log^3 2.$$

Nous trouvons aisément la seconde des deux intégrales qui figurent dans cette équation. Par suite on obtient la formule démontrée antérieurement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^3 \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\left(\log^3 2 + \frac{\pi^2}{4}\log 2 + \frac{3}{2}S_3\right). \tag{27}$$

D'autre part (13) nous donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \log^2 \cos\varphi \cot\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}\log^3 2 + \frac{\pi^2}{12}\log 2 - \frac{3}{8}S_3\right). \tag{28}$$

Pour $p = 4$ ou $p = 5$, nous déduirons en outre de (12)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \log^2 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{12}\left(\frac{11}{60}\pi^4 + 6S_3\log 2 + \frac{\pi^2}{4}\log^2 2\right). \tag{29}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \log^3 \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^4}{16}\log 2 + \frac{\pi^2}{6}\log^3 2 + \frac{\pi^2}{2}S_3 + S_3\log^2 2\right). \tag{30}$$

Pour établir les deux formules (29) et (30), nous nous sommes appuyés sur le nº 3 de mon mémoire cité dans le nº 12 du présent travail.

14. Enfin, si nous posons

$$K_p\left(\frac{\pi}{4}\right) = G_p\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_p + i d_p,$$

nous conclurons aisément de (6) ou de (8), en posant $p = 2$,

$$c_2 = \frac{5\pi^2}{96} - \frac{1}{8}\log^2 2, \tag{31}$$

$$d_2 = \tau_2 - \frac{\pi}{8}\log 2, \tag{32}$$

où

$$\tau_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Par les deux mêmes formules fondamentales nous voyons en outre que c_3 et d_3 s'expriment d'une manière analogue. Toutefois je ne m'arrêterai pas ici aux calculs nécessaires pour trouver ces expressions, parce qu'elles sont un peu compliquées.

Copenhague, mars 1896.